SEMESTRAL

UNI





TRIGONOMETRÍA

Tema: Cónicas I

Semana: 20

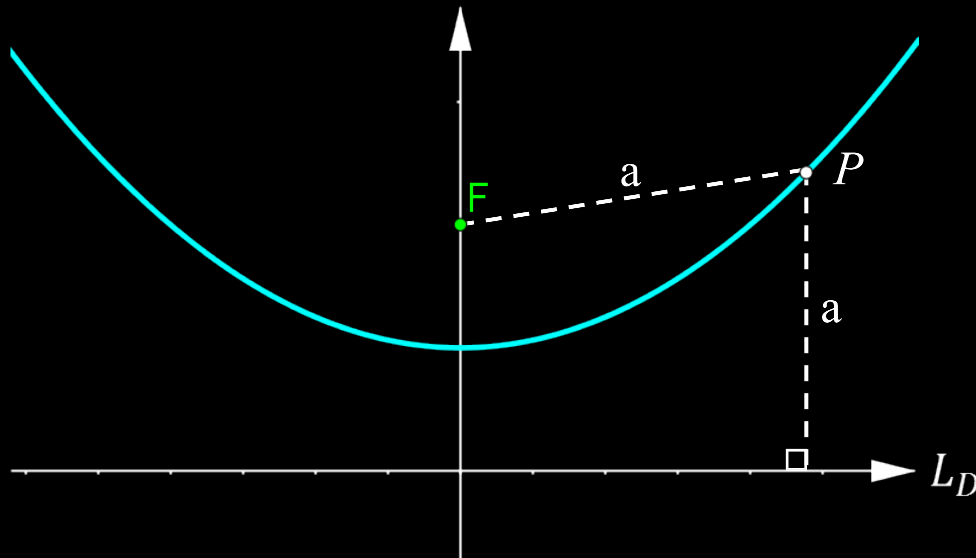
academiacesarvallejo.edu.pe

La Parábola



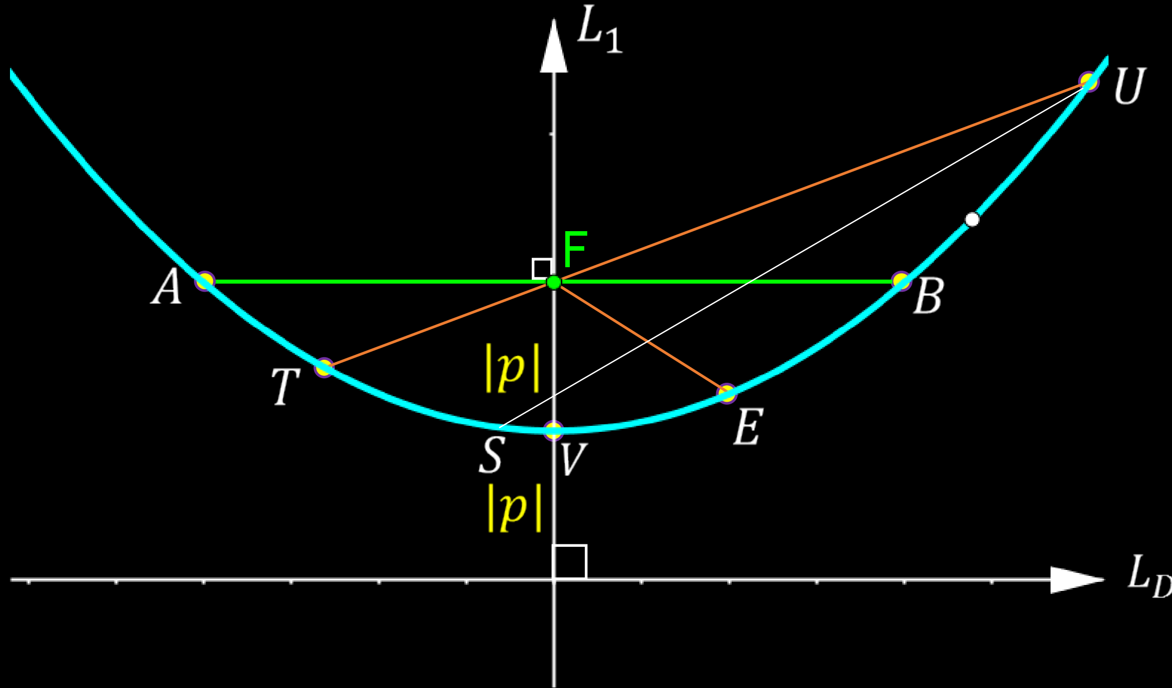
Definición

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un plano, que equidistan de una recta fija L_D (llamada recta directriz) y de un punto fijo F (llamado foco) donde F no pertenece a la recta directriz y todos los elementos mencionados están en un mismo plano.



$$d(P;F) = d(P;L_D)$$

Elementos asociados a la parábola





L_D: *Recta Directriz*

F: *Foco; el punto fijo de la parábola*

V: *Vértice; el punto medio del segmento que une la directriz y el foco*

L_1: *Eje focal*

$\overline{TU}$: *Cuerda focal*

$\overline{EF}$: *Radio focal, también se le conoce como radio vector*

$\overline{AB}$: *Lado recto; es la cuerda focal perpendicular al eje focal*

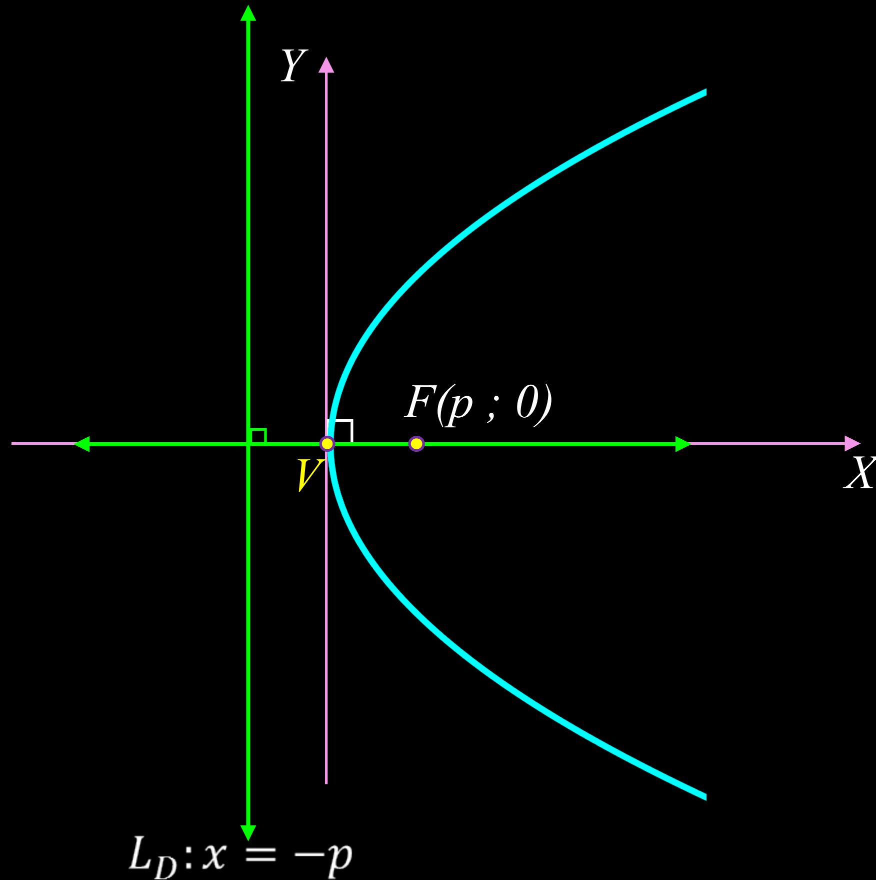
$2|p|$: *Distancia entre el foco (F) y la recta directriz (L_D)*

$\overline{SU}$: *Cuerda*



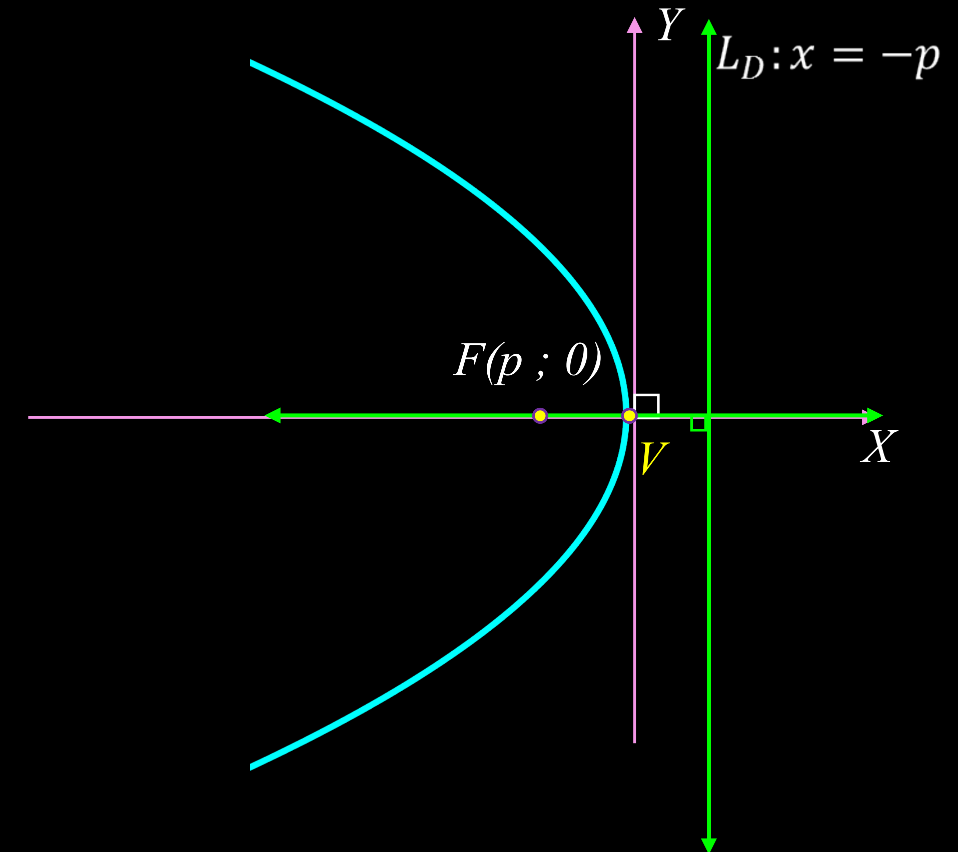
Con vértice en el origen de coordenadas y eje focal el eje X

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha



$$y^2 = 4px$$

Si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda



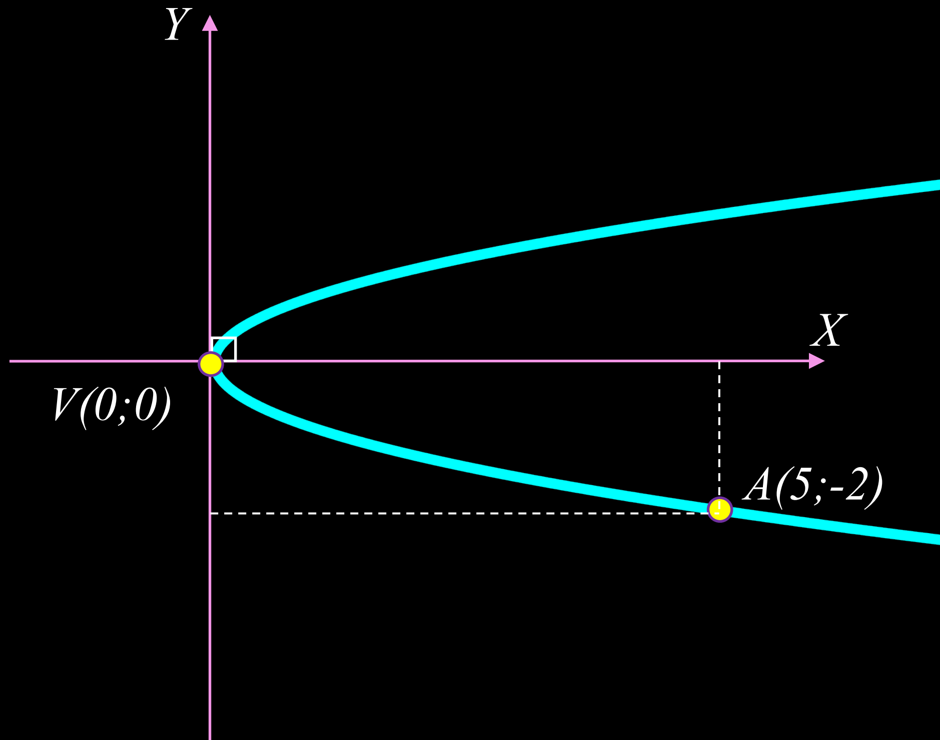


APLICACIÓN 1

Determine la ecuación de la parábola con eje focal en el eje de abscisas y vértice en el origen de coordenadas, que pasa por el punto A(5;-2).

RESOLUCIÓN

Graficando:



La ecuación de la parábola esta dada por:

$$y^2 = 4px$$

Pero el punto A (5;-2) pertenece a la parábola, entonces reemplazando:

$$(-2)^2 = 4p(5)$$

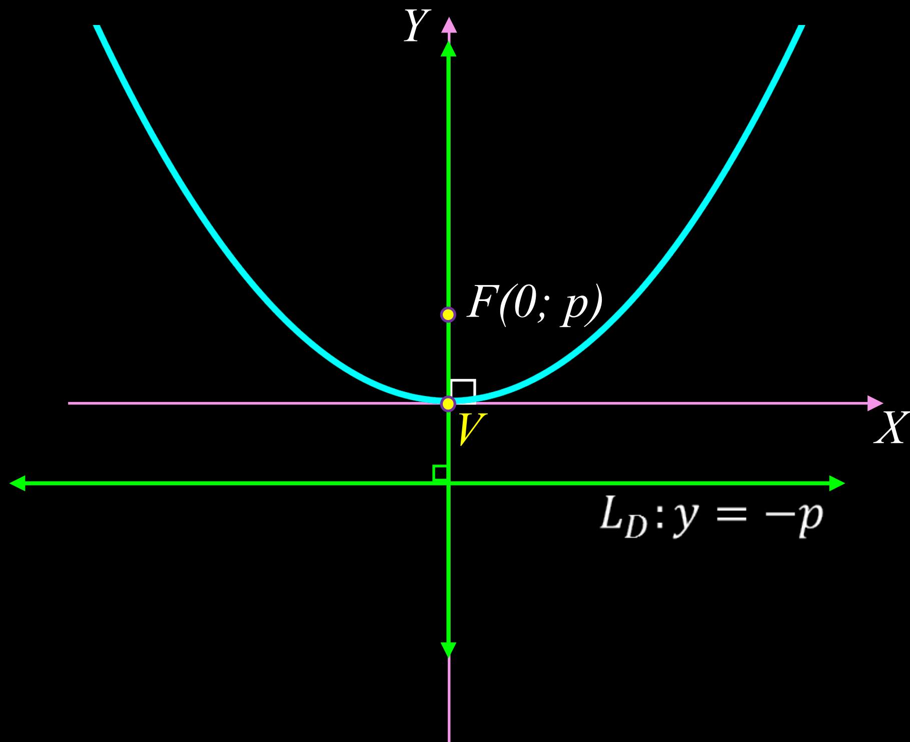
$$\Rightarrow p = \frac{1}{5}$$

$$\therefore y^2 = \frac{4}{5}x$$

Con vértice en el origen de coordenadas y eje focal el eje Y

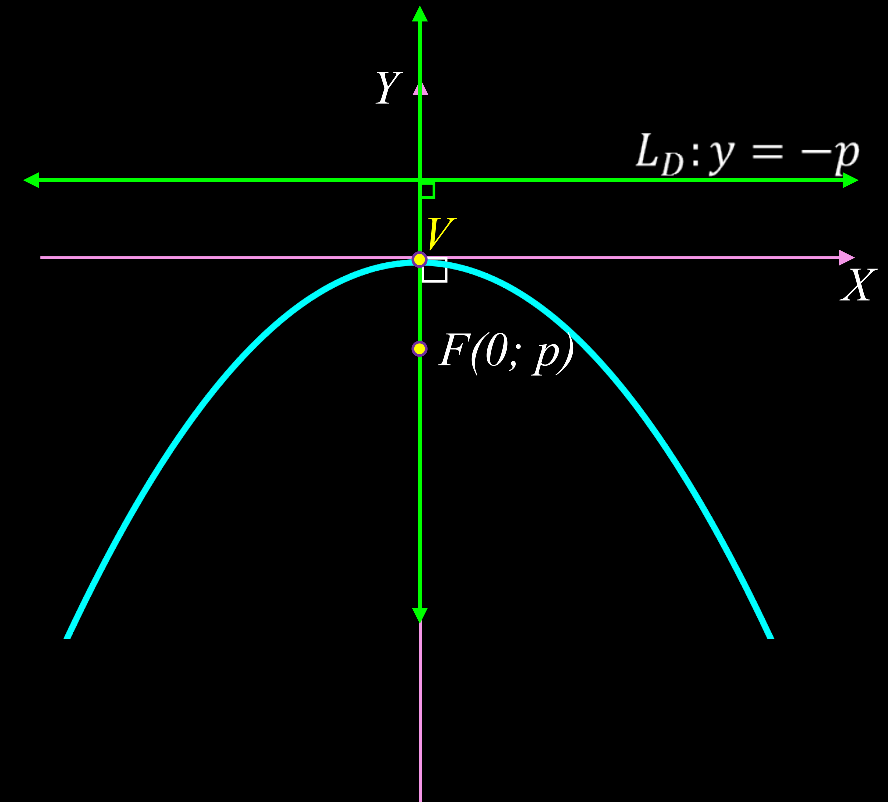


Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba



$$x^2 = 4py$$

Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo





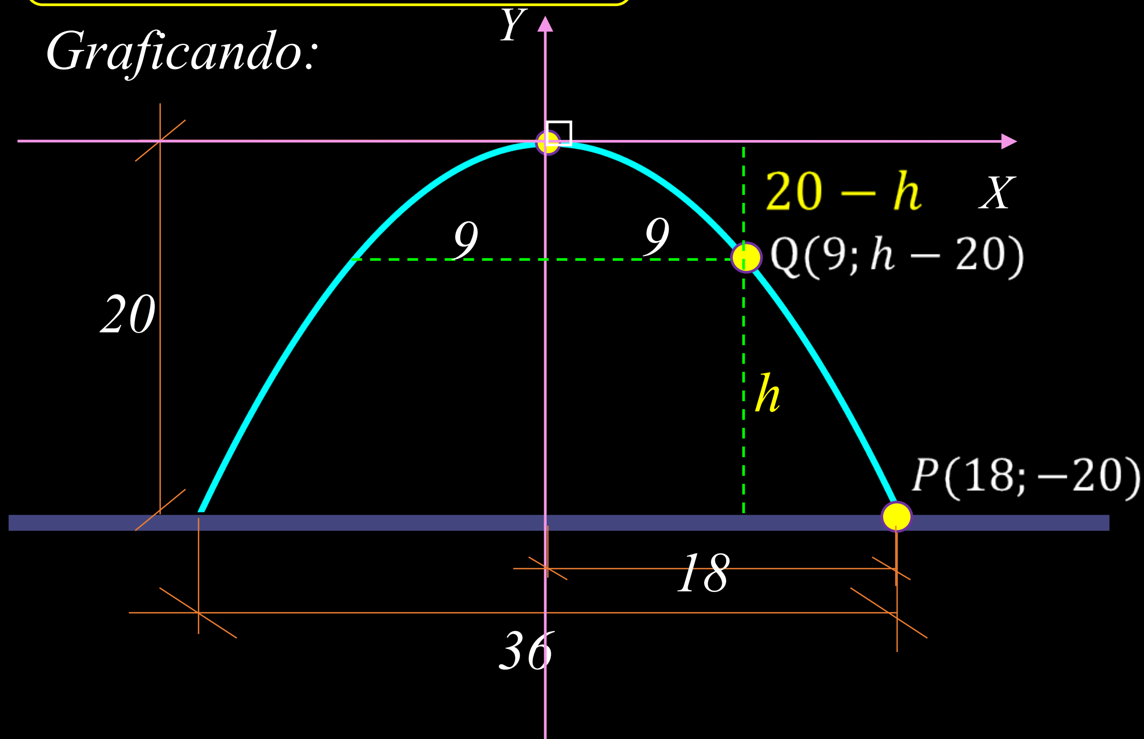
APLICACIÓN 2

Se construye un arco parabólico cuyo vértice se encuentra en la parte superior, si se sabe que tiene una altura de 20 m y un ancho de 36 m en la base, calcule a que altura sobre la base el arco tiene un ancho de 18 m

A) 14 m B) 15 m C) 16 m D) 17 m E) 18 m

RESOLUCIÓN

Graficando:



La ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Los puntos P y Q pertenecen a la parábola:

$$\left.\begin{aligned} 18^2 &= 4p(-20) \\ 9^2 &= 4p(h-20) \end{aligned}\right\} \quad \frac{18^2}{9^2} = \frac{-20}{h-20} = 4$$

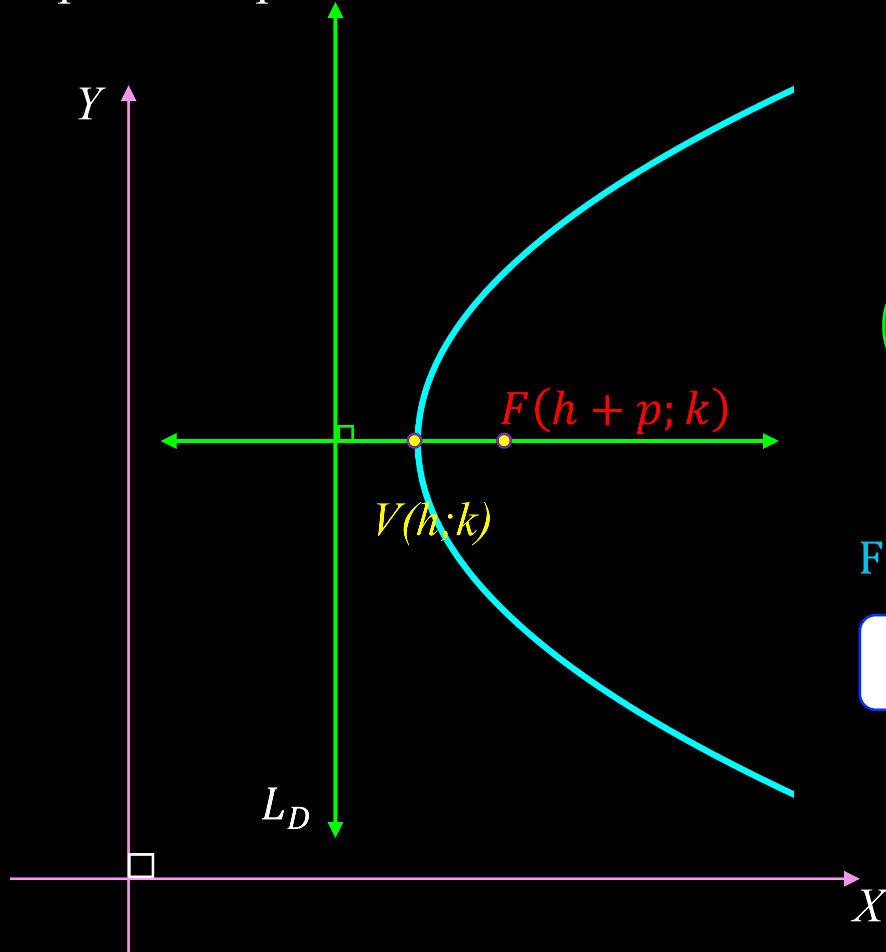
$$4h - 80 = -20 \qquad \Rightarrow h = 15\ m$$



Formas de la ecuación de la parábola

Con vértice V(h;k) y eje focal paralelo al eje X

Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha

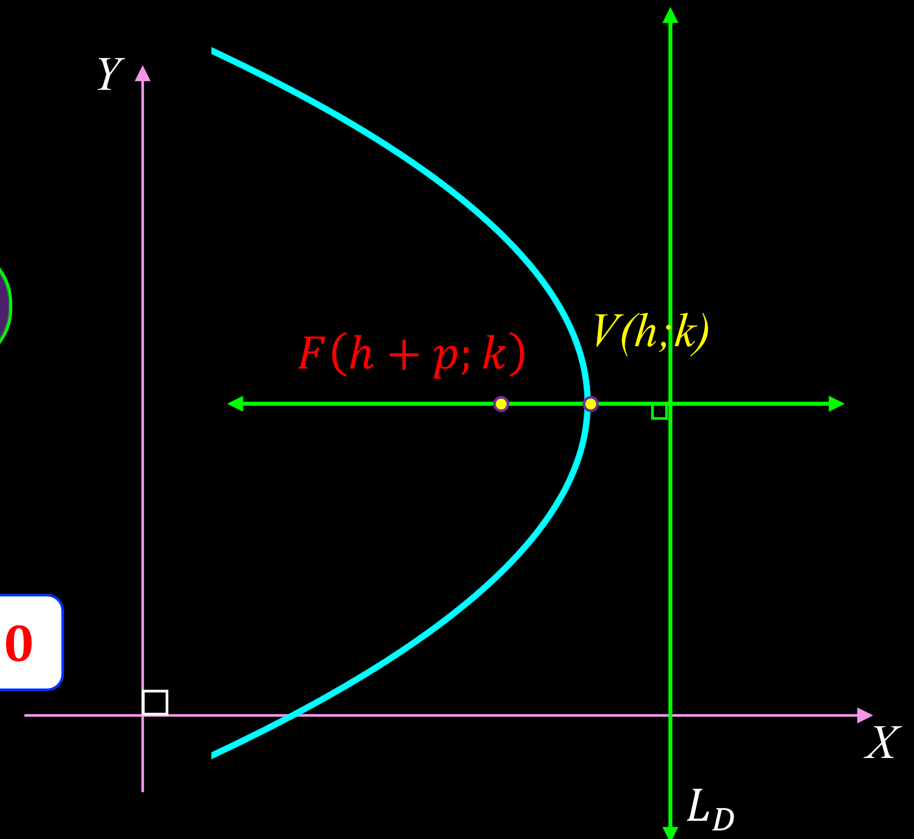


$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Forma general

$$\mathcal{P}:\ y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

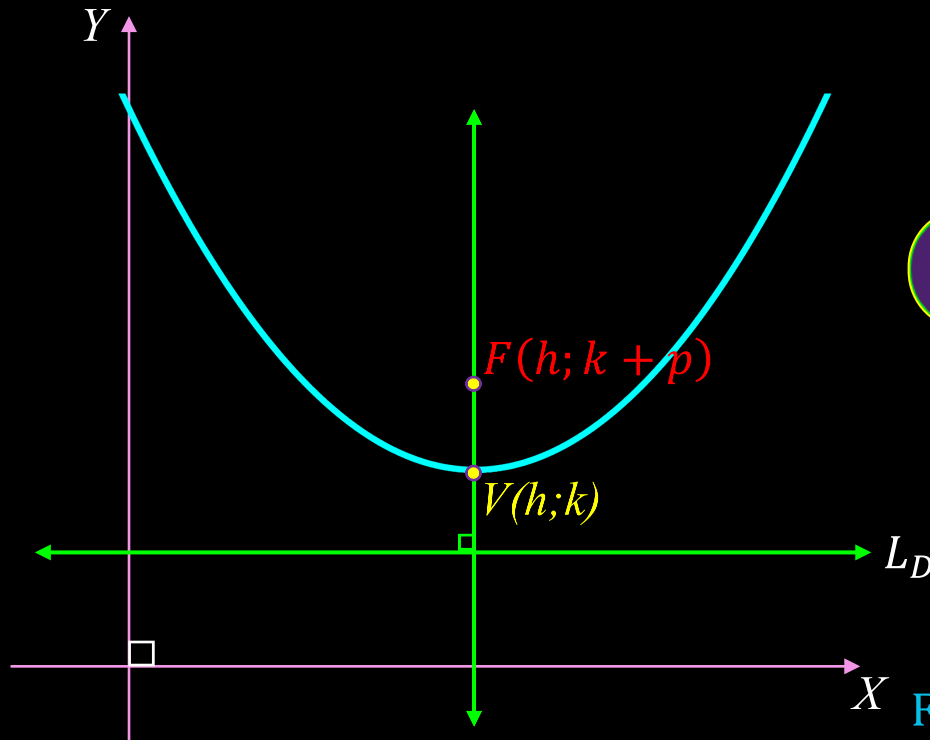
Si p < 0, la parábola se abre hacia la izquierda



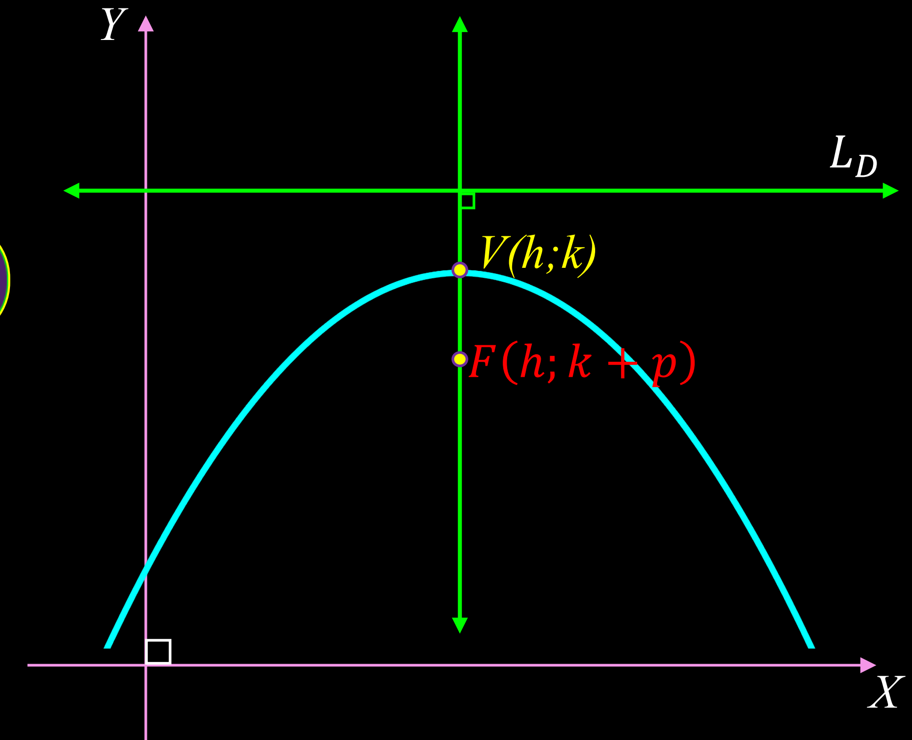


Con vértice V(h;k) y eje focal paralelo al eje Y

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba



Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

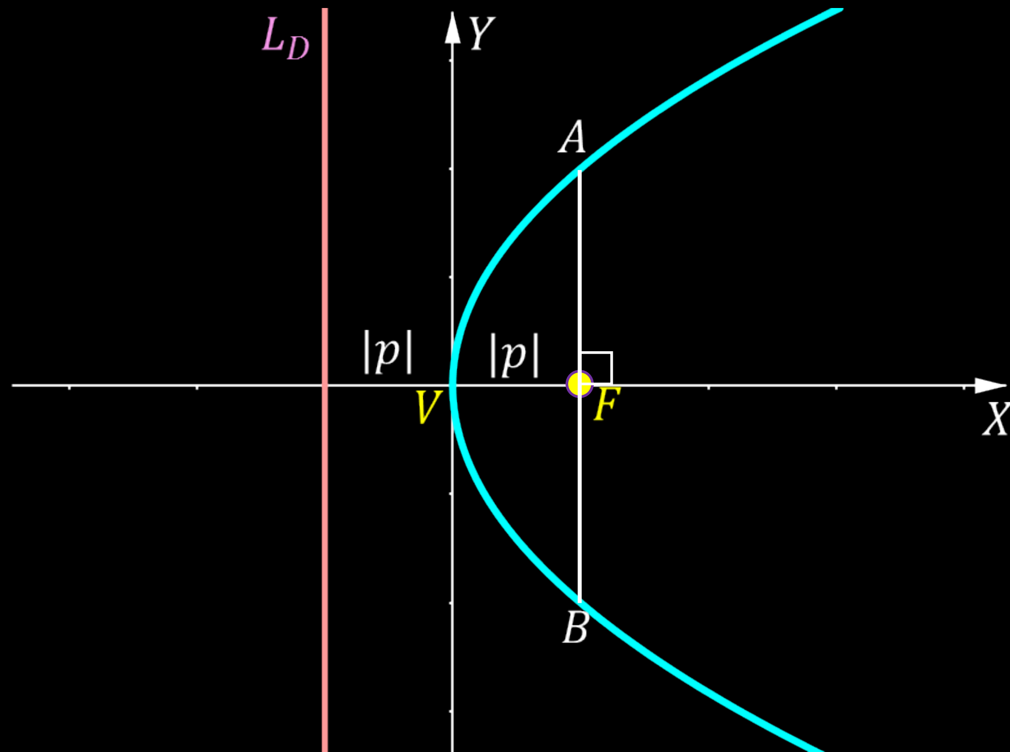
Forma general

$$\mathcal{P}:\ x^2 + Dx + Ey + F = 0$$



Teorema:

La longitud del lado recto de cualquier parábola es 4|p|



AB = 4|p|



EJERCICIO 1

Dada la ecuación de la parábola :

$y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$, entonces la suma de las coordenadas del foco de la parábola es

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN

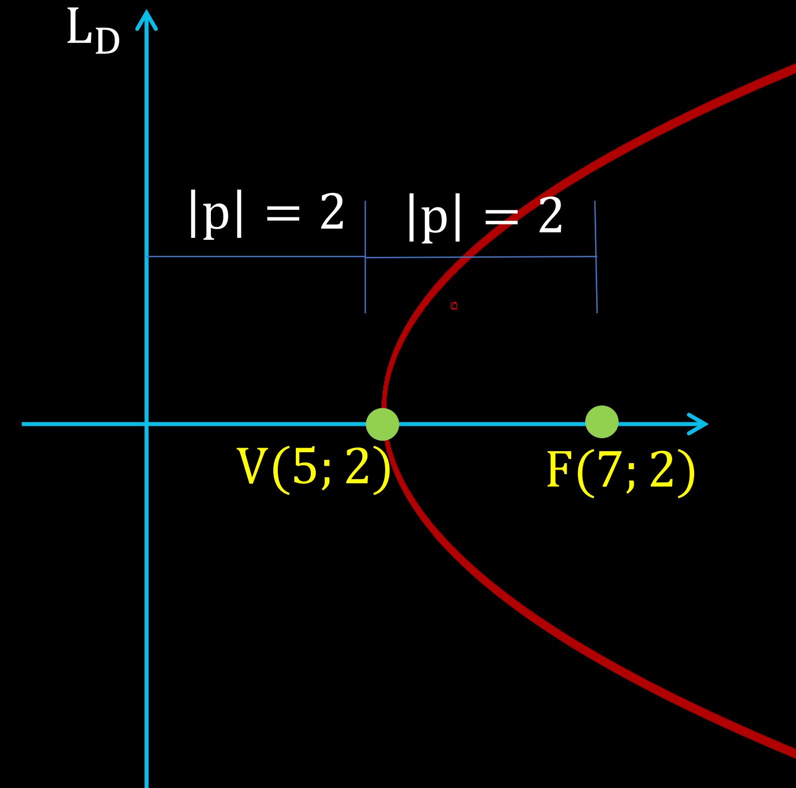
$y^2 - 4y + 4 = 8x - 40$

Completando cuadrados

$(y-2)^2 = 8(x-5)$

$V(5;2)$; $4p = 8 \rightarrow \mathbf{p = 2}$

Como $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha



∴ suma de coordenadas del foco =9

EJERCICIO 2

Determine la ecuación de la parábola de eje focal vertical cuyo vértice es $V(-1;2)$ y pasa por el punto $(2;5)$

A) $x^2 + 2x + 3y + 8 = 0$

B) $x^2 - 2x - 3y - 7 = 0$

C) $x^2 + 2x - 3y + 7 = 0$

D) $x^2 + 2x + 3y + 6 = 0$

E) $x^2 - 2x + 3y + 9 = 0$

RESOLUCIÓN

La ecuación de una parábola con eje focal vertical es:

$$\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Como $V(-1;2) \rightarrow h = -1$ y $k = 2$

$$\mathcal{P}: (x+1)^2 = 4p(y-2)$$

$$(2;5) \in \mathcal{P}: (x+1)^2 = 4p(y-2)$$

$$(2+1)^2 = 4p(5-2) \rightarrow 4p = 3$$

$$\mathcal{P}: (x+1)^2 = 3(y-2)$$

$$\therefore \mathcal{P}: x^2 + 2x - 3y + 7 = 0$$

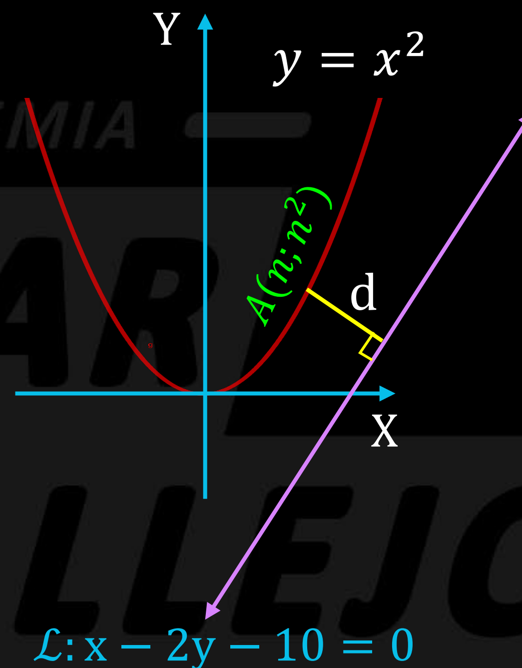
EJERCICIO 3 UNI 2015 – 2

Dada la parabola $\mathcal{P}: y = x^2$ y la recta $\mathcal{L}: x - 2y = 10$, halle la distancia mínima entre ellas.

A) $\frac{79\sqrt{5}}{40}$ B) $\frac{80\sqrt{5}}{39}$ C) $\frac{79\sqrt{5}}{39}$

D) $\frac{81\sqrt{5}}{39}$ E) $\frac{81\sqrt{5}}{40}$

RESOLUCION



Para un punto $A(n; n^2)$

$$d = \frac{|n - 2n^2 - 10|}{\sqrt{5}}$$

Analizando

$$d = \frac{2\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{79}{8}}{\sqrt{5}}$$

Para que la distancia sea mínima $\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$

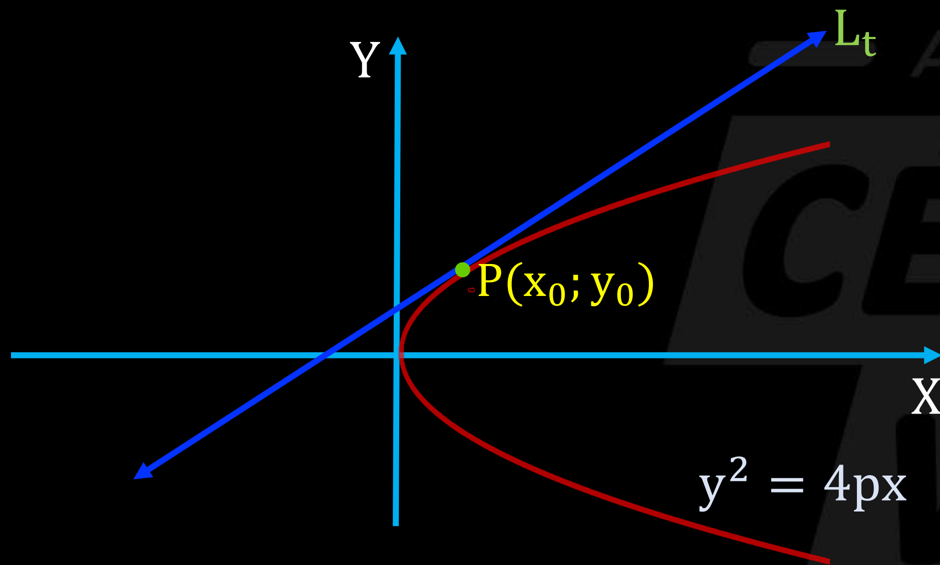
Entonces

$$d = \frac{79}{8\sqrt{5}}$$

$$\therefore d = \frac{79\sqrt{5}}{40} \text{ u}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA PARÁBOLA



$$m = \frac{2p}{y_0}$$

COMPROBACIÓN

Sea la recta tangente: $L_t: y - y_0 = m(x - x_0)$ ... (α)

y la ecuación de la parábola $y^2 = 4px$ ... (β)

Reemplazando (β) en (α)

$$y - y_0 = m\left(\frac{y^2}{4p} - x_0\right); \text{ operando ...}$$

$$my^2 - 4py + (4py_0 - 4pmx_0) = 0$$

Por condición de tangencia $\triangle = 0$

$$(-4p)^2 - 4m(4py_0 - 4pmx_0) = 0 \rightarrow \text{operando}$$

$$4p^2 - 4mpy_0 + m^2y_0^2 = 0$$

$$(2p - my_0)^2 = 0$$

$$\rightarrow m = \frac{2p}{y_0} \text{ (pendiente de la recta } L_t\text{)}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



www.academiacesarvallejo.edu.pe

